

**SCUOLA SUPERIORE DI STUDI UNIVERSITARI
E DI PERFEZIONAMENTO SANT'ANNA**

**Concorso di ammissione al I anno
Prova scritta di Matematica - 28/08/2018**

Si ricorda che i passaggi devono essere *adeguatamente* giustificati. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

Ognuno dei 3 esercizi deve essere svolto su un foglio protocollo distinto.

Esercizio 1. Lo stato di Santannaland utilizza come moneta nazionale il Piso e la Banca Centrale ha deciso di stampare banconote di soltanto due tagli. Si tenga conto che:

- a) tutti i beni hanno un prezzo intero, compreso tra 1 e 100 (estremi compresi);
 - b) i beni hanno prezzi uniformemente ripartiti e la stessa probabilità di essere acquistati;
 - c) i pagamenti vengono fatti in contanti per la cifra esatta e senza ricevere resto;
 - d) ogni cittadino possiede banconote dei due tagli in gran quantità, sicuramente sufficienti a fare gli acquisti.
1. Determinare la scelta dei due tagli di banconote che rende minimo in media il numero di banconote necessario per gli acquisti.
 2. Discutere la questione precedente nel caso generale in cui i prezzi dei beni siano compresi tra 1 ed N , con N intero qualsiasi, lasciando uguale a due il numero di tagli di banconote da stampare.

Esercizio 2. Nello stato di Santannaland la patente a punti, segue le seguenti regole:

- a) al tempo 0 tutte le patenti hanno 20 punti;
- b) ad ogni infrazione la patente viene decurtata di un punto;
- c) se la patente arriva a 0 punti, la patente viene sospesa;
- d) dopo un tempo L dall'ultima infrazione, i punti vengono riportati al valore massimo che la persona ha avuto nell'arco della sua vita;
- e) se dall'ultimo istante in cui i punti sono stati riportati al loro massimo o dal tempo 0 è trascorso un tempo L senza infrazioni, allora il massimo viene innalzato di 2 punti.

Supponiamo che ogni persona commetta un'infrazione ogni tempo T . Per cercare di massimizzare i loro punti, 2 amici, in maniera fraudolenta, scelgono di comunicare chi tra loro ha compiuto l'infrazione e a cui verranno decurtati quindi i punti, nel modo per loro più conveniente.

1. Assumendo che i due amici adottino la strategia per loro più conveniente, quali sono i valori di T che permettono di non sospendere alcuna patente?
2. Nel caso in cui gli amici che si mettono d'accordo sono n , quali sono i valori di T che permettono di non sospendere alcuna patente?

Esercizio 3. Un'azienda del centro Italia produce mattonelle quadrate di lato 9 cm al prezzo k_1 ciascuna o una loro variante di lato 9,5 cm al prezzo unitario $k_2 > k_1$. La pavimentazione di una stanza consiste nel ricoprire l'intero suolo della stanza, con mattonelle o loro ritagli. La pavimentazione deve rispettare le seguenti regole:

- a) se due mattonelle si toccano allora o si toccano per un angolo oppure hanno in comune un intero lato;
- b) solo al bordo della stanza possono essere usati ritagli di mattonelle;
- c) tra il muro ed una mattonella intera può essere usato al più un ritaglio;
- d) una mattonella può essere tagliata più volte.

A causa del consumo della lama della taglierina, ogni taglio ha un prezzo k_3 . Un architetto deve fare pavimentare una stanza quadrata di lato 6 m e deve scegliere se acquistare mattonelle standard da 9 cm di lato oppure la variante da 9,5 cm di lato.

1. Calcolare il costo minimo per pavimentare la stanza con mattonelle standard ed il costo minimo per pavimentarla con le mattonelle variate e stabilire sotto quali ipotesi su k_1 , k_2 , k_3 la prima soluzione è più conveniente;
2. Se ad ogni taglio c'è una probabilità dell'1% di rompere la mattonella (e doverla buttare via) a quanto ammonta il costo atteso della pavimentazione con mattonelle standard?