

SCUOLA SUPERIORE DI STUDI UNIVERSITARI  
E DI PERFEZIONAMENTO SANT'ANNA

Concorso di ammissione al I anno  
Prova scritta di Matematica - 26/08/2020

Si ricorda che i passaggi devono essere *adeguatamente* giustificati. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

Ciascun esercizio deve essere svolto su un foglio protocollo distinto.

Si ricorda di usare per la scrittura, pena esclusione, solamente ed esclusivamente la penna fornita in dotazione dalla commissione.

**Esercizio 1.** Un albero del Sant'Anna è cresciuto secondo le seguenti regole:

- il tronco è un segmento verticale di lunghezza 1 metro ed il tronco si considera un ramo;
- alla fine di ogni ramo di lunghezza  $\ell$ , dipartono due rami di lunghezza  $\rho \times \ell$ , con  $\rho \in [0, 1]$ ;
- i due rami che dipartono da uno stesso ramo formano un angolo  $\alpha \in [0, 2\pi]$  fra di loro, ogni ramo forma quindi un angolo  $\pi - \frac{\alpha}{2}$  con il ramo da è stato originato;
- si definisce *profondità* di un ramo il numero di giunzioni che è necessario attraversare per giungere fino al tronco. Il tronco ha quindi profondità 0.

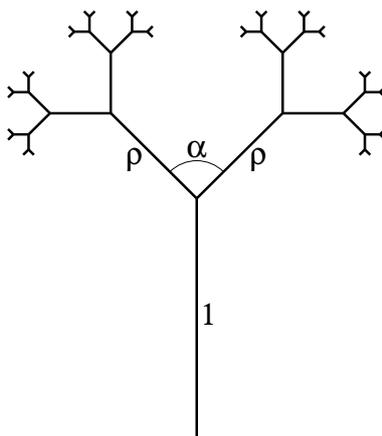


FIGURA 1. Un esempio di albero con rami di profondità fino a 5 e con  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\rho = \frac{1}{2}$ .

- Con  $\alpha = \pi$ , determinare tutti i valori di  $\rho$  per cui l'albero "tocca terra" in un punto diverso dal tronco.
- Con  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , quale è l'altezza massima, in funzione di  $\rho$ ?
- Dato un punto arbitrario del piano, trovare, se esiste, una coppia di valori  $(\alpha, \rho)$  tale che il punto appartenga all'albero costruito con tali valori.

**Esercizio 2.** Siano  $a, b$  due numeri scelti a caso nell'intervallo  $[0, 1]$ .

(a) Determinare la probabilità  $p_3$  che il polinomio

$$P_3(x) = x^3 - ax + b$$

abbia tre radici reali distinte.

(b) Per ogni intero  $n \geq 3$  determinare la probabilità  $p_n$  che il polinomio

$$P_n(x) = x^n - ax + b$$

abbia tre radici reali distinte.

(c) Calcolare il limite delle probabilità

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{2n+1}.$$

**Esercizio 3.** Un'aula deve essere riconfigurata per il rientro durante una pandemia e si decide che ogni studente deve distare da ogni altro almeno 2 metri. Si considera ogni studente come un punto, da posizionare opportunamente nell'aula, incluso sulle linee che rappresentano i muri.

(a) È possibile mettere in un'aula quadrata di lato  $2n$  metri più di  $(n+1)^2$  studenti? Se sì per quali  $n$ ?

(b) Per la cattedra e la lavagna è necessario lasciare una striscia verso i banchi, di almeno 2 metri sul corrispondente lato dell'aula (il lato e la larghezza della striscia possono essere scelti). Tra le aule rettangolari di area  $36 \text{ m}^2$  e con lati di almeno 4 metri, quale contiene più studenti? Quanti studenti ci si possono sedere e con che configurazione? Quanto sarà larga la striscia?