

## Seconda Prova Scritta - 01 Settembre 2020

### Traccia di Matematica

**Esercizio 1.** In una classe di 30 persone si devono formare 3 gruppi di lavoro per affrontare dei lavori di approfondimento sul calcolo combinatorio. Trovare quanti gruppi si possono formare nell'ipotesi che

- I gruppi siano formati da 10 persone;
- Il primo gruppo sia formato da 7 persone, il secondo da 10, il terzo da 13.

**Esercizio 2.** Si consideri un test diagnostico per una malattia infettiva che dà una risposta positiva (malato), quando l'individuo è realmente affetto dalla malattia, nel 99.5% dei casi, mentre per un soggetto sano il test dà risposta negativa (sano) nel 99.8% dei casi. Dai dati raccolti sulla malattia, si sa che, nella popolazione di riferimento, un paziente su cento ha contratto tale malattia. Si trovi la probabilità che un individuo abbia la malattia nell'ipotesi che il suo test dia esito positivo.

**Esercizio 3.** Si consideri una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dove  $\mathbb{R}$  rappresenta l'insieme dei numeri reali, per cui vale la seguente proprietà

$$f(x_1^2 - x_2^2) = x_1 f(x_1) - x_2 f(x_2) \quad (1)$$

- Si dica se la funzione  $f(x) = x^2$  verifica tale proprietà;
- Si dica se la funzione  $f(x) = ax$  con  $a \in \mathbb{R}$  verifica tale proprietà;
- Calcolare  $f(0)$ ;
- Verificare che la funzione è dispari (cioè  $f(x) = -f(-x)$ ) (Può essere d'aiuto considerare l'espressione di  $f(x_1^2)$ ).

**Esercizio 4.** a) Un allevatore di conigli si chiede quante coppie di conigli si possono ottenere in un anno, a partire da una unica coppia, nell'ipotesi che ogni mese ciascuna coppia con due o più mesi di vita, dia alla luce una nuova coppia. Per semplicità, si suppone che:

- nessuna coppia muoia;
- la prima coppia sia costituita da conigli appena nati;
- il tempo di gestazione sia di un mese;
- la maturità sessuale sia raggiunta dopo il primo mese di vita.

b) Verificare che tale successione di numeri può essere generata dalla seguente equazione ricorsiva

$$x_{t+1} = x_t + x_{t-1} \quad (2)$$

con  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ , dove il pedice di  $x$  rappresenta il numero del mese (0 equivale al mese precedente a quello in cui la prima coppia è stata inserita nel recinto). Fornire una motivazione a tale fatto;

**Continua sul retro del foglio**

c) Verificare che la funzione  $x_t = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^t - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^t \right)$  risolve (2);

d) Calcolare  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x_{t+1}}{x_t}$ .

**Esercizio 5.** Sia  $\triangle ABC$  un triangolo avente  $\overline{BC} = 2\overline{AB}$ . Si considerino i punti  $D$  ed  $E$  punti medi di  $\overline{BC}$  e  $\overline{BD}$ , rispettivamente. Si provi che  $\overline{AD}$  è bisettrice di  $\angle CAE$ .